8 Determinante

8.1 Def: Die Determinante einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij}) \in Mat_K(n \times n)$ ist definiert durch die Leibniz-Formel:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

Def. 2.27   Def. 2.29

8.2 Beispiele:

(i) $\det((a_{11})) = a_{11}$

$S_1 = \{id\}$

(ii) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$$S_2 = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{id \\ +}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\tau \\ -}} \Big\}$$

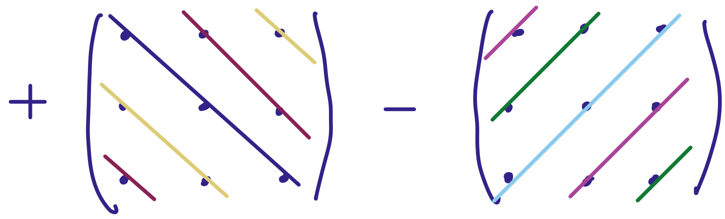
$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

(iii) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$- a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

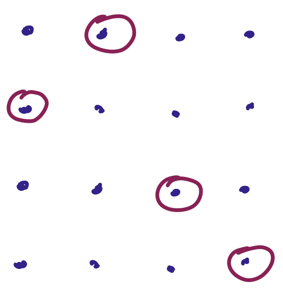
$$S_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathrm{id}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \overset{+}{\mathrm{id}}, \overset{+}{(1\ 3\ 2)}, \overset{+}{(1\ 2\ 3)}, \underset{-}{(1\ 2)}, \underset{-}{(3\ 2)}, \underset{-}{(1, 3)} \right\}$$



(iv) det(4x4-Matrix) $= \ldots$

besser anders ausrechnen



(v) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

obere Dreiecksmatrix: $a_{ij} = 0$ für $i > j$

($a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ ist der Summand für $\sigma = id$.
Für jedes $\sigma \in S_n \setminus id$ gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\sigma(i) < i$. Für dieses i ist $a_{i\sigma(i)} = 0$.)

(vi) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ \vdots & a_{22} & 0 & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

untere Dreiecksmatrix

(vii) Ähnlich sieht man:

$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det A \cdot \det C$

nachträglich ergänzt.

(A, C quadr. Matrizen)

8.3 Notiz: $\det(A^T) = \det(A)$

Beweis:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\underbrace{\sigma(i)}_{j}\, i} \quad \underbrace{i}_{\sigma^{-1}(j)}$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j\,\sigma^{-1}(j)}$$

sgn Homomorphismus

$S_n \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$

also $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)^{-1}$

$= \operatorname{sgn}(\sigma)$

$$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j\,\sigma^{-1}(j)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)}$$

Umbenennung

$$= \det(A)$$

$\square$